Les mathématiques, outils indispensables pour les cours de sciences : quelques exemples

---

1. **Loi d'Arrhenius** (19^es-20^es : physicien et chimiste suédois)

   La vitesse d'une réaction chimique indique la rapidité avec laquelle une quantité d'un réactif ou d'un produit se modifie au cours du temps. C'est une quantité positive qui s'exprime en moles par seconde (mol.s^{-1}).

   En pratique, cette notion est importante. Songeons par exemple à la vitesse de dégradation des matériaux, à celle de l'élimination d'un polluant dans l'environnement, à celle de la prise d'un ciment ou encore à la vitesse d'action d'un médicament.

   Les facteurs influençant la vitesse d'une réaction sont nombreux : la température, la quantité des réactifs, la pression, la présence d'un catalyseur ... Le facteur le plus important est la température.

   En cinétique chimique, la loi d'Arrhenius permet de décrire la variation de la vitesse d'une réaction chimique en fonction de la température. On a la relation

   $$D_T \ln k = \frac{E_a}{RT^2}$$

   où

   k est le coefficient de vitesse (fonction de T)
   T est la température en K (Kelvin)
   R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,314$ J.mol^{-1}.K^{-1})
   E_a est l'énergie d'activation [1] donnée en kJ.mol^{-1} et supposée indépendante de la température (ce qui est vrai sur un intervalle de température limité).

   Applications

   – Montrer que $k = A \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right)$ où A est une constante strictement positive.

   – Décrire la rapidité de la réaction en fonction de l'énergie d'activiation, à température constante.

   – Si l'on considère deux températures différentes T_1 et T_2 pour lesquelles les vitesses de réaction k_1 et k_2 sont connues, montrer que $E_a = \frac{RT_1T_2}{T_1-T_2} \ln \frac{k_1}{k_2}$.

   – La réaction $2\ N_2O_5 \rightleftharpoons 2\ N_2O_4 + O_2$ a lieu dans le tétrachlorure de carbone à la température ordinaire. Sachant que le coefficient de vitesse de cette réaction vaut $2,35.10^{-4}$ s^{-1} à 293 K et $9,15.10^{-4}$ s^{-1} à 303 K, calculer E_a.

   – L'énergie d'activation de la réaction $C_4H_8 \rightleftharpoons 2\ C_2H_4$ est égale à 262 kJ.mol^{-1}. A 600 K, le coefficient de vitesse vaut $6,07.10^{-8}$ s^{-1}. Quelle est la valeur du coefficient de vitesse à 800 K.

2. **L'équation de Nernst** (19^es-20^es : physicien et chimiste allemand)

   En électrochimie, on étudie notamment l'influence de la concentration sur le potentiel d'électrode. Dans des conditions non-standards (concentration différente de 1 mol/l et pression différente de 1

1. L'énergie d'activation est la quantité d'énergie nécessaire pour initier un processus chimique, le plus souvent une réaction. Cette énergie d'activation peut être diminuée en utilisant un catalyseur.

atm), on obtient le potentiel d'électrode E d'un couple rédox par la relation de Nernst

$$E = E^\circ - \frac{RT}{nF} \ln\left(\frac{[\text{forme réduite}]}{[\text{forme oxydée}]}\right)$$

où

T est la température en K (Kelvin)
R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,314$ J.mol^{-1}.K^{-1})
n est le nombre d'électrons échangés
F est la constante de Faraday ($F = 96\ 500$ C).

A la température de 25° C, montrer qu'on obtient

$$E = E^\circ - \frac{0,0592}{n} \log\left(\frac{[\text{forme réduite}]}{[\text{forme oxydée}]}\right).$$

3. L'équation des ondes $D_t^2 u = a^2 D_x^2 u$, où a est une constante égale à la vitesse de propagation de la vague, décrit notamment le mouvement ondulatoire d'une vague dans l'océan. Si $u(x,t)$ représente la hauteur de la vague à l'instant t et à une distance x du début de la vague , vérifier que la fonction $u : (x,t) \mapsto \sin(x - at) + \ln(x + at)$ est une solution de cette équation.

4. En hydrogéologie, dans le cas d'une nappe libre, l'écoulement vers un puits de pompage est déterminé conformément à l'équation de Dupuit. Le débit Q (en m^3/s) s'obtient à partir de la relation

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{2\pi K}{Q} z\, dz$$

où

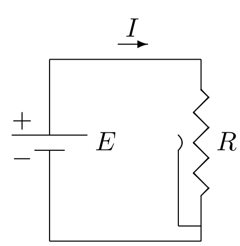
K est le coefficient de perméabilité (ou conductivité hydraulique) de l'aquifère (en m/s)
x est la distance radiale horizontale à l'axe du puits (en m)
z est la cote d'altitude (en m)

Pour éliminer la constante de primitivation, on introduit des conditions aux limites, à savoir $x = r$ et $z = h$ d'une part, $x = R$ et $z = H$ d'autre part [2].

Montrer que le débit vaut

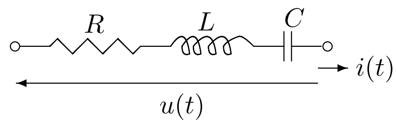
$$Q = \frac{\pi K(H^2 - h^2)}{\ln(R/r)}.$$

5. Un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r débite sur une résistance extérieure R variable. Quelle est la valeur de R pour que la puissance P dégagée dans R soit maximale si $P = RI^2 \quad \text{avec} \quad I = \dfrac{E}{R + r}$?



2. r est le rayon de forage du puits, R est le rayon d'influence correspondant à la distance où le rabattement dû au pompage est encore tout juste mesurable, h est la hauteur de la nappe dans le puits en pompage et H est la hauteur de la nappe au repos

6. Un circuit électrique RLC série est composé d'une résistance R, d'une self d'inductance L et d'un condensateur de capacité C placés en série.

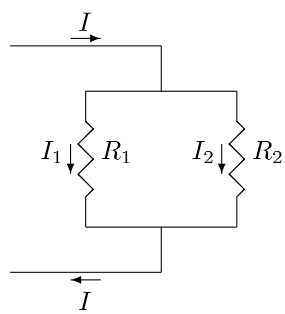


La différence de potentiel aux bornes du circuit est donnée par la somme des différences de potentiel aux bornes des différents éléments soit

$$u(t) = Ri(t) + LD_t i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\ dt.$$

Que vaut la différence de potentiel $u(t)$ lorsque le circuit est parcouru par un courant alternatif $i(t) = I\cos(\omega t)$?

7. Un circuit électrique est constitué de deux résistances en parallèle R_1 et R_2. Connaissant le courant extérieur I, calculer les intensités des courants I_1 et I_2 dans chaque résistance sachant que $I = I_1 + I_2$ et que les différences de potentiel ($V = RI$) aux bornes de chaque résistance sont égales.



8. Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable en $-\infty$, la probabilité que cette quantité ne dépasse pas un certain seuil x^* est donnée par

$$\mathbb{P}[X < x^*] = \int_{-\infty}^{x^*} f_X(x)dx.$$

De plus, si l'on s'intéresse à la mesure M que l'on peut effectuer de cette quantité et que l'on estime que l'on risque de commettre une erreur de mesure Y indépendante de la quantité X et modélisée par une autre fonction de densité $x \mapsto f_Y(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable en $-\infty$, la probabilité que la mesure effectuée ne dépasse pas ce seuil x^* est maintenant donnée par

$$\mathbb{P}[M < x^*] = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y<x^*\}} f_X(x) f_Y(y) dx\, dy.$$

Afin de modéliser les variables X et Y, plusieurs fonctions de densités connues peuvent être utilisées en fonction du contexte :
- La loi exponentielle : $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda\, x)\chi_{[0,+\infty[}(x)$, pour un taux $\lambda > 0$ caractérisant l'inverse de la moyenne de la variable X [3] ;
- La loi uniforme : $f_Y(x) = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}(x)$, pour $a < b$ caractérisant l'intervalle des valeurs possibles pour Y ;
- …

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \chi_I(x)$ est la fonction qui vaut 1 lorsque $x \in I$ et 0 sinon.

a) Le nombre d'années de fonctionnement d'un appareil de télévision est une variable aléatoire X exponentielle de taux $\lambda = 1/4$. Si vous achetez un téléviseur neuf, quelle est la probabilité qu'il ne fonctionne plus après 4 ans ?

b) La durée de vie d'un élément radioactif peut être modélisée par une loi exponentielle négative de taux $1/5$. En voulant mesurer cette durée de vie on commet une erreur aléatoire indépendante de la durée de vie et uniformément distribuée dans $[-0,1;0,1]$. Que vaut la probabilité que la durée de vie mesurée soit inférieure à 0,2 ?

9. Pour modéliser une durée de vie, la loi exponentielle de taux $\lambda > 0$ est très utilisée. De plus, elle permet aussi de modéliser la probabilité de survie après un temps t, appelée tout simplement survie au temps t, comme étant $S(t) = \mathbb{P}(X > t)$. La loi exponentielle est caractérisée par la propriété suivante de sa fonction de survie

$$\mathbb{P}(X > t + s \text{ sachant que } X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

qui signifie que le temps de survie est indépendant du passé. On dit que la loi exponentielle est sans mémoire. [4]

Suite à une maladie dégénérative grave, on estime la fonction de survie S par un modèle exponentiel de taux $1/2$. Que vaut la survie à 4 ans ? Deux ans après le diagnostic, que vaut à nouveau la probabilité qu'il soit toujours en vie dans 4 ans ?

10. Des expérimentateurs placent des souris dans un labyrinthe composé de couloirs et de deux pièces. Du point de départ, chaque souris se rend finalement soit dans la pièce I où elle est récompensée par un fromage, soit dans la pièce II où elle ne gagne aucune récompense. Quand on répète cette expérience, on observe que 80% des souris qui sont entrées une fois dans la pièce I y retournent la fois suivante, par contre, 60% des souris qui sont entrées dans la pièce II vont la fois suivante dans la pièce I. On suppose que, la première fois, autant de souris choisissent la pièce I que la pièce II.

A très long terme, quelle sera la répartition des souris entre les deux pièces ?

4. Suggestion : La probabilité qu'un événement se produise est égale à la différence entre 1 et la probabilité que cet événement ne se produise pas)